

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.  
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА**

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДЛЯ ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ ТЕХНІЧНИХ ФАКУЛЬТЕТІВ

*Затверджено Методичною радою фізико-математичного факультету*

Київ  
2014

Аналітична геометрія. Лінійна алгебра. Збірник завдань до розрахункової роботи для студентів I курсу технічних факультетів/ Уклад.: Буценко Ю.П., Барановська Г.Г., Дем'яненко О.О., Нефьодова Г.Д., Симчук Я.В.- К.:2014.- 63 с.

*Гриф надано Методичною радою ФМФ  
(Протокол № 8 від 23.06.2014р )*

Навчальне видання

**АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ  
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА**

Збірник завдань до типової розрахункової роботи  
для студентів I курсу технічних факультетів

Укладачі:

Буценко Юрій Павлович  
Барановська Галина Григорівна  
Дем'яненко Ольга Олегівна  
Нефьодова Галина Дмитрівна  
Симчук Ярослав Вікторович

Відповідальний редактор О.І. Клесов, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент А.М. Кулик, к.ф.-м.н, доц.

## **Вступ**

При вивченні курсу "Аналітична геометрія та лінійна алгебра" студенти знайомляться з основними положеннями теорії визначників, систем лінійних рівнянь та ін. Навчальним планом даної дисципліни передбачено також набування студентами навичок виконання ряду типових завдань.

Даний збірник підготовлено з метою організації регулярної роботи студентів з вивчення курсу. Кожен студент розв'язує завдання одного з тридцяти запропонованих варіантів.

### Варіант 1

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми

$$z = \frac{2}{-i} + i(1+i).$$

4. Обчислити  $(\sqrt{3} - i)^6$

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[3]{i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множину точок, що задовольняють нерівності  $2 < |z - 3 - 4i| \leq 5$ ,  $\text{Im } z \geq 4$ .

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами

$$A(3, 4, -1); B(3, 0, -4); C(5, 6, -2); S(6, 2, -2)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OZ}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}; \quad \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 3; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(-2\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-1; -17), B(-5; -25), C(-1; -21)$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот; Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння; Зробіть малюнок.  $y^2 = 8x$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$$

- б) Спростити рівняння кривої та побудувати її.  
 її. Визначити всі її параметри.

$$5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 9 = 0$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1,$$

$$4y^2 - z^2 + 32x - 24y - 2z + 35 = 0$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $z^2 = xy$

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2; x + y = 1; x = 0; y = 0; z = 0$$

18. Обчисліть визначник:

- а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;
- $$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
- б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.}$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & 14 & -2 & 1 & 2 \\ 13 & 4 & 12 & 1 & 6 & 11 \\ 4 & 7 & 46 & -12 & -7 & -12 \\ 1 & -2 & -16 & 5 & 4 & 7 \end{array} \right)$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$

$$\vec{p} = (3; -2; 1), \quad \vec{q} = (-1; 1; -2), \quad \vec{r} = (2; 1; -3),$$

$$\vec{a} = (11; -6; 5)$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{1; 4; 6\}, \quad \vec{b} = \{1; -1; 1\}, \quad \vec{c} = \{1; 1; 3\}$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність

$$x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

## Варіант 2

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми

$$z = \frac{1}{1+2i} + \frac{i}{2-i}$$

4. Обчислити  $(1+i\sqrt{3})^{10}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[3]{1-i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множину точок, що задовольняють рівності

$$|z-i| = |z+3|.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами

$A(2, 3, -2)$ ;  $B(2, -1, -5)$ ;  $C(6, 7, -4)$ ;  $S(3, -1, 0)$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}; \quad \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 1; \quad |\vec{q}| = 4; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(2\vec{a} - \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-6; -8), B(-16; -28), C(-1; -18)$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот; Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння; Зробіть малюнок.  $y^2 = -16x$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри:

півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати

її. Визначити всі її параметри:

$$16x^2 - 25y^2 + 32x - 100y + 84 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4},$$

$$484x^2 - 4y^2 - 121z^2 + 8y - 484z - 4 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів,

або як циліндричну):  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 6x$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$y = \sqrt{x}; y = 2\sqrt{x}; z = 0; x + z = 4.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за

елементами деякого

рядка або стовпця;

б) зведенням до

трикутного вигляду.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + 5x - 4, A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.}$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$

$$\vec{p} = (2; 1; 0), \vec{q} = (1; -1; 2), \vec{r} = (2; 2; -1),$$

$$\vec{a} = (3; 7; -7).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації:

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

### Варіант 3

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 2 \cos 3\varphi$

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $(x^2 + y^2)^{3/2} = x + y$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = (1+i)(1-3i).$$

4. Обчислити:  $(1+i)^{20}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[3]{-1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множину точок, що задовольняють нерівності:

$$\left| \frac{z-3}{z-2} \right| \geq 1.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами

$$A(4, 5, 0); B(4, 1, -3); C(6, 7, -1); S(7, 3, -3)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OY}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}; \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 4; \quad \left( \widehat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(\vec{a} - 6\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(2; -9), B(-2; -17), C(4; -13)$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот; Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок  $y^2 = 16x$ .

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$$



- б) Спростити рівняння кривої та побудувати її.  
 в) Визначити всі її параметри:

$$5x^2 - 9y^2 - 30x + 18y - 9 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16},$$

$$4x^2 + y^2 + 16z^2 - 8x + 2y - 11 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $y = z^2 - 2z$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + z^2 = 9; \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

18. Обчисліть визначник:

- а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;
- $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
- б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 5x - 6, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
 б) матричним методом;  
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..}$  неоднорідної системи за формулою

$$x_{3..} = x_{3.o.} + x_{3.н.}$$

- де  $x_{3.o.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{3.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 & 25 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$

$$\vec{p} = (0; 1; -2), \quad \vec{q} = (3; -1; 1), \quad \vec{r} = (4; 1; 0),$$

$$\vec{a} = (-5; 9; -13).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{2; 3; 1\}; \quad \vec{b} = \{3; -1; 5\}, \quad \vec{c} = \{1; -4; 3\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

#### Варіант 4

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 4(1 + \sin \varphi)$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = 0$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \left( \frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1} \right)^2.$$

4. Обчислити:  $(2 + i\sqrt{2})^{15}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{8}$ .

6. На комплексній площині зобразити множину точок, що задовольняють нерівності:

$$|z - i| - |z + i| > 2.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(1, 2, -3); B(3, 4, -4); C(1, -10, -12); S(6, 6, 7)$ .

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}; \quad \vec{b} = -\vec{p} + 4\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 3; \quad |\vec{q}| = 1; \quad \left( \widehat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $pr_{\vec{a}}(\vec{a} + 2\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-3; -18), B(-9; -30), C(0; -24).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот; Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$x^2 = 16y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директриси, асимптоти:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри:

$$y^2 + 6x + 14y + 43 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4},$$

$$9x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 18z - 49 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $2z = xy$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 - y^2; z = 0; x = 4.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 3x - 10, A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..n}$  неоднорідної системи за формулою

$$x_{3..n} = x_{3..o} + x_{ч..n}.$$

де  $x_{3..o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи  $x_{ч..n}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 12 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ :

$$\vec{p} = (0; 5; 1), \vec{q} = (3; 2; -1), \vec{r} = (-1; 1; 0),$$

$$\vec{a} = (-15; 5; 6).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації:

$$\sin x, \sin^2 x, \cos^2 x, x \in (-\infty; \infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знако-визначеність:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

### Варіант 5

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $(x^2 + y^2)^{3/2} = y$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = (1 - 2i)(2 + i) \cdot \frac{1}{i}$$

4. Обчислити:  $(1 - i\sqrt{3})^6$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$0 < \operatorname{Re} iz < 1, \quad |z + 1| \geq 1.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(0, -2, -1); B(3, -2, 3); C(1, -4, -3); S(-1, 4, 5).$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OY}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}; \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 3; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(\vec{a} - 4\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(2; 0), B(0; -4), C(3; -2).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.  $y^2 = 4x$ .

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0.$$

- б) Спростити рівняння кривої та побудувати її.  
 її. Визначити всі її параметри.

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{4} = 1,$$

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 288z + 25 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $x^2 + z^2 = 8z$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 9; z = x^2 + y^2 + 9; z \geq 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 7x + 10, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
 б) матричним методом;  
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загаль-

ний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (2; 1; 0), \vec{q} = (1; -1; 2), \vec{r} = (3; 7; -7),$$

$$\vec{a} = (2; 2; -1).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації:

$$\vec{a} = \{5; 4; 3\}, \vec{b} = \{3; 3; 2\}, \vec{c} = \{8; 1; 3\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

## Варіант 6

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 4 \sin 3\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 + y^2 = x + y$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{5}{1+2i} + \frac{5}{2-i}.$$

4. Обчислити:  $(1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^8$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{1+i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = c.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(1, -1, 0)$ ;  $B(4, -1, 4)$ ;  $C(2, -3, -2)$ ;  $S(1, 4, 6)$ .

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OZ}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}; \quad \vec{b} = -4\vec{p} - \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 1; \quad |\vec{q}| = 5; \quad (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{5\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $pr_{\vec{a}}(3\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(19; -18), B(15; -26), C(21; -22).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.  $x^2 = 32y$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$2x^2 + 5y^2 - 20y + 5 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$-\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1,$$

$$9x^2 + 25y^2 - 225z^2 - 18x - 1800z - 3591 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):

$$\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)^2 = 9\left(\frac{x^2}{4} - y^2\right).$$

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = xy; x^2 + y^2 = 9; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AXB = C$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 2; 0), \vec{q} = (2; -1; 3), \vec{r} = (0; 1; 2),$$

$$\vec{a} = (2; 0; -1).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації:  $1, x, \sin x, x \in (-\infty; \infty)$ .

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

### Варіант 7

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = -2(\cos \varphi - 1)$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 + y^2 = 2x + 3$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \left( \frac{1-i}{1+i} \right)^3.$$

4. Обчислити:  $(-1+i)^{16}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[8]{-1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$|z| < \arg z, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(3, 4, -1); B(3, -4, -7); C(9, 10, -4); S(6, 4, 3)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overline{AM}$ ;

2)  $\cos \angle BAC$ ;

3) вектор  $\overline{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\angle BAC$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overline{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 2\vec{p} + 7\vec{q}; \quad \vec{b} = \vec{p} + 6\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 1; \quad |\vec{q}| = 3; \quad \left( \vec{p}, \vec{q} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(\vec{a} - 2\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-16; -6), B(-12; 2), C(-18; -2).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$y^2 = -20x.$$



14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$3x^2 + 4y + 6x - 9 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1,$$

$$4z^2 - x^2 + 16z - 8x - 32y = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $z = 2e^{-(x^2+y^2)}$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; z \geq 1; x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + 7x + 10, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 12 & -3 \\ -5 & 2 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 12 & 8 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & 11 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & -12 \\ 7 & 5 & -3 & 12 & 0 & 7 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (0; 1; 2), \quad \vec{q} = (1; 0; 1), \quad \vec{r} = (-1; 2; 4),$$

$$\vec{a} = (-2; 4; 7).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{1; 1; 1\}, \quad \vec{b} = \{0; 1; 1\}, \quad \vec{c} = \{0; 0; 1\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-x_1^2 - 6x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_2x_3.$$

### Варіант 8

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 3 \cos 4\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 + y^2 = 2y$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{1+2i}{(1-i)^3}.$$

4. Обчислити:  $(-\sqrt{3}-i)^{10}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності

$$|z-1| = |\operatorname{Re} z|.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами

$$A(3, 1, 2); B(6, 1, 6); C(4, -1, 0); S(0, 6, 7)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OZ}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}; \quad \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 4; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(1; -8), B(19; 28), C(-8; 10).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{225} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.  $x^2 = -32y$ .

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри:

півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 2 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$2z = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{32},$$

$$9x^2 - 36y^2 + 4z^2 + 18x - 72y - 16z - 47 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $y = \ln(z+1)$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16; x^2 + y^2 = 4x.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;  
б) зведенням до трикутного вигляду.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + x - 6, A = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & -4 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..n}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3..n} = x_{3..o} + x_{ч..n},$$

де  $x_{3..o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч..n}$  - частковий розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 7 & 4 & 7 & -3 & 7 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 8 & 5 & 5 & -4 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 3; 0), \vec{q} = (2; -1; 1), \vec{r} = (0; -1; 2), \vec{a} = (6; 12; -1).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$e^x, e^{2x}, e^{3x}, x \in (-\infty; +\infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$4x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

### Варіант 9

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 4 \sin 4\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{1 - i^{13}}{(1 + 2i)^2}.$$

4. Обчислити  $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{10}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[5]{-1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$|z + 1| + |z - 1| \leq 3.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(-1, -3, -2); B(2, -3, 2); C(0, -5, -4); S(7, -1, 0)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}; \quad \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 3; \quad |\vec{q}| = 4; \quad (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(2\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-13; -14), B(-1; 10), C(-19; -2).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$y^2 = 24x.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 54 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z = \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{42},$$

$$144x^2 + y^2 + 4z^2 + 4y - 8z - 136 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 9; z = x^2 + y^2; z \geq 0; y \geq x; y \leq x\sqrt{3}.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 14x - 9, A = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3..} = x_{3..o} + x_{3..н},$$

де  $x_{3..o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{3..н}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (0; 3; 2), \vec{q} = (2; 1; -1), \vec{r} = (1; -1; 1), \\ \vec{a} = (1; -4; 4)$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{1; -1; 2\}, \vec{b} = \{-1; 1; -1\}, \vec{c} = \{2; -1; 1\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знако-визначеність:

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

### Варіант 10

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = -2 \cos 3\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показниково-форму:

$$z = \frac{1+i}{i} + \frac{i}{1+i}.$$

4. Обчислити:  $(-\sqrt{3} + i)^{12}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[5]{i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множину точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Re} z + 1 = |z|.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(0, -1, -2); B(8, -1, 4); C(2, 0, 0); S(6, 7, 0).$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OY}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}; \quad \vec{b} = -2\vec{p} + \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 5; \quad |\vec{q}| = 2; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(2\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(6; -16), B(2; -24), C(8; -20).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$x^2 = 18y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$5x^2 + 6y^2 - 10x - 12y - 4 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z^2 = \frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{25},$$

$$16x^2 - 9y^2 + 9z^2 - 32x - 36y - 18z + 133 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 20; z \geq x^2 + y^2; y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}; y \leq x\sqrt{3}.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + x + 3, A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 = 2, \\ 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.}$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (4; 1; 1), \vec{q} = (2; 0; -3), \vec{r} = (-1; 2; 1),$$

$$\vec{a} = (-9; 5; 5).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$x, x^2, (1+x)^2, x \in (-\infty; +\infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-6x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

### Варіант 11

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 - y^2 = 1$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = 7 : (\sqrt{5} + i\sqrt{2}).$$

4. Обчислити:  $(1 - i)^{20}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[5]{1 + i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1, \quad |z - 1| < 1.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(3, 2, 1); B(6, 6, 1); C(5, 3, 3); S(7, -3, 0).$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overline{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overline{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overline{OY}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}; \quad \vec{b} = -3\vec{p} + 2\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 4; \quad |\vec{q}| = 3; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_a(2\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-1; -8), B(11; 16), C(-7; 4).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням. Знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$y^2 = -16x.$$



14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директриси, асимптоти.

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$3x^2 + 8y^2 + 12x - 16y - 4 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{64} + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1,$$

$$25x^2 + 4y^2 + 50x - 8y - 200z + 29 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $x^2 = yz$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2; y = 2x; y = 1; y + x = 6; z = 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;  
б) зведенням до трикутного вигляду.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & -14 & 10 \\ 1 & -3 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 21 & -4 \end{vmatrix}$$

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 4x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 6. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 1 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (0; 4; 1), \quad \vec{q} = (1; 3; -1), \quad \vec{r} = (-2; 0; 1), \\ \vec{a} = (-5; -5; 5).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{b} = \{4; 5; 6\}, \quad \vec{c} = \{7; 8; 9\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

## Варіант 12

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 + y^2 = x$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{(1+i)(2+i)}{2-i}.$$

4. Обчислити:  $(2 + i\sqrt{12})^5$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[6]{-1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Re}(z^2) = a^2.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(1, 2, -3)$ ;  $B(1, -2, -6)$ ;  $C(5, 6, -5)$ ;  $S(3, 2, 10)$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OZ}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}; \quad \vec{b} = -2\vec{p} + 5\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 1; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(2\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-17; -13), B(-15; -9), C(-18; -11).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$x^2 = -8y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0.$$

- б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$2x^2 - 3y^2 - 6y - 5 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{81} - \frac{z^2}{25} = -1,$$

$$16x^2 - y^2 - 4z^2 + 4y - 8z - 8 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $x^2 + z^2 = 8z$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = 16 - y^2; 4x + 3y = 12; y \geq 0; x = 0.$$

18. Обчисліть визначник:

- а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;
- $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
- б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - x - 2, A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AXB = C$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & 14 \\ 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3,n}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3,n} = x_{3,o} + x_{3,n},$$

- де  $x_{3,o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{3,n}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (5; 1; 0), \vec{q} = (2; -1; 3), \vec{r} = (1; 0; -1),$$

$$\vec{a} = (13; 2; 7).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$1, x, x^2, x \in (-\infty; +\infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-x_1^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

### Варіант 13

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 3 \cos 3\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $(x-a)^2 + y^2 = 0$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{(1-i)(2-i)}{2+i}.$$

4. Обчислити:  $(1 + \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})^6$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[6]{i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(-1, 2, 3); B(-1, -2, 6); C(2, 2, -1); S(-1, 3, 5)$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OZ}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}; \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 1; \quad |\vec{q}| = 3; \quad (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(\vec{b} - 4\vec{a})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(8; -15), B(20; 9), C(2; -3).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$y^2 = 28x.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$4x^2 - 6y^2 + 8x - 12 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{121} = 1,$$

$$16x^2 - 25y^2 - 32z - 100y - 800z - 84 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $x = y^2 - 4y$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 1; 2x + 4y + z = 12.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 7x + 2, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..n}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3..n} = x_{3..o} + x_{ч..n},$$

де  $x_{3..o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч..n}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 7 & 6 & 85 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 52 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 9 & 2 & 73 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (0; 1; 1), \vec{q} = (-2; 0; 1), \vec{r} = (3; 1; 0),$$

$$\vec{a} = (-19; -1; 7).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{1; 1; 1\}, \vec{b} = \{1; 2; 3\}, \vec{c} = \{1; 3; 6\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

### Варіант 14

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 3(1 - \sin \varphi)$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $(x^2 + y^2)^{3/2} = x^2 - y^2$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{3}{1+2i} + \frac{4}{2-i}$$

4. Обчислити:  $(4 + 4i)^6$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[3]{-i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(3, 1, 2); B(6, 5, 2); C(4, -1, 0); S(3, 4, 0)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}; \vec{b} = \vec{p} - \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 4; |\vec{q}| = 5; \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(\vec{a} - 3\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(11; -6), B(-9; -46), C(21; -26).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$x^2 = 10y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$5x^2 - 4y^2 - 10x - 8y + 3 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9},$$

$$4x^2 - y^2 - 25z^2 - 8x - 6y + 50z + 70 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $x = zy$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 16; z \geq 2x; z \leq 4x.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 0; 2), \quad \vec{q} = (0; 1; 1), \quad \vec{r} = (2; -1; 4), \\ \vec{a} = (3; -3; 4).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\cos x, \sin x, \sin 2x, \quad x \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-2x_1^2 - 4x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

### Варіант 15

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 + (y - a^2) = a^2$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = (2 + 3i)^2 - (2 - 3i)^2.$$

4. Обчислити:  $(-1 + i\sqrt{3})^{10}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[3]{i+1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множину точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Im}(z^2) = c.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(5, 0, -1); B(8, 4, -1); C(9, -2, 3); S(8, 4, 0)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OZ}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}; \quad \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 5; \quad \left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-10; -14), B(0; 6), C(-15; -4).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

$$\text{малюнок. } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$y^2 = -36x.$$



14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$9x^2 - 4y^2 + 18x - 12y + 36 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$2z = \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18},$$

$$4x^2 + 121y^2 + z^2 + 24x - 242y - 327 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів,

або як циліндричну):  $\frac{y^2}{9} + z^2 = 4z$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 2y; \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z = 1; z = 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & -6 \\ 4 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 9x + 10, A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AXB = C$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частковий розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \\ 1 & 3 & -5 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (3; 1; 0), \vec{q} = (-1; 2; 1), \vec{r} = (-1; 0; 2),$$

$$\vec{a} = (3; 3; -1).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{3; 4; -5\}, \vec{b} = \{8; 7; -2\}, \vec{c} = \{2; -1; 8\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3.$$

## Варіант 16

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 5 \sin 3\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $3x - 2y = 8$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникової форми:

$$z = (3 + 2\sqrt{2}i)(3 - 2\sqrt{2}i) + \frac{1}{i}.$$

4. Обчислити:  $(1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^4$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[3]{1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Im} \frac{z-i}{z-1} = 0.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(4, -1, -2)$ ;  $B(7, 3, -2)$ ;  $C(10, -7, -5)$ ;  $S(6, 7, 0)$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overline{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overline{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overline{OZ}$ ;

б) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}; \quad \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 1; \quad |\vec{q}| = 2; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(2\vec{a} - \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-6; -10), B(-18; -34), C(0; -22).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння; Зробіть малюнок.

$$x^2 = -20y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$x^2 - xy + y^2 + x + y = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$x^2 - y^2 - 5x - 3y = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36},$$

$$4x^2 - 25y^2 - 25z^2 + 16x - 50y + 100z - 209 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{9}\right)^2 = 4\left(x^2 - \frac{y^2}{9}\right).$$

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2 = xy; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; x^2 + y^2 = 1.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

б) зведенням до трикутного вигляду.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 12 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 8 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 12 & -9 & 8 & 9 \\ 4 & -9 & 8 & -7 & -8 \\ 12 & 15 & -10 & 9 & 10 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (2; 0; 3), \quad \vec{q} = (-1; 2; 1), \quad \vec{r} = (1; 1; -1),$$

$$\vec{a} = (-1; 7; -4).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$e^x, e^{2x}, e^{-x}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-3x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

### Варіант 17

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = -4(\sin \varphi - 1)$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $xu = 1$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{12}{5i} + \frac{i}{1+i}.$$

4. Обчислити:  $(1 - i\sqrt{3})^8$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[3]{-8}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$1 \leq \operatorname{Re} z < 4, \quad \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(1, 4, 5); B(1, 1, 1); C(5, 8, 7); S(7, 4, 6).$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}; \quad \vec{b} = 2\vec{p} - 3\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 5; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(3\vec{b} - 2\vec{a})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-18; -12), B(-8; 8), C(-23; -2).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{225} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$y^2 = 30x.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$5x^2 + 9y^2 + 30x - 18y + 60 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{196} - \frac{z^2}{4} = 1,$$

$$16x^2 + 9y^2 + 64x + 18y - 144z + 217 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $z = 4e^{-(x^2+y^2)}$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1; y \geq 0; y \leq x.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

1	2	2	1
-1	-2	0	-1
2	3	0	2

б) зведенням до трикутного вигляду.

-2	0	1	3
----	---	---	---

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 6x - 10, A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
 б) матричним методом;  
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3.n.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3.n.} = x_{3.o.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{3.o.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частковий розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 & 11 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 8 & -3 \\ 5 & 4 & 5 & 12 & 5 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 1; 4), \vec{q} = (0; -3; 2), \vec{r} = (2; 1; -1), \\ \vec{a} = (6; 5; -14).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{3; 2; -4\}, \vec{b} = \{4; 1; -2\}, \vec{c} = \{5; 2; -3\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$x_1^2 + 10x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

### Варіант 18

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 2 \cos 4\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $\sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникової форми:

$$z = \frac{\sqrt{3} + i}{2 - i\sqrt{3}}.$$

4. Обчислити:  $(-\sqrt{3} - \sqrt{-2})^6$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{-i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності:

$$\arg \frac{z-1}{z+1} = 0.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(2, 5, 6); B(0, 7, 5); C(5, 5, 2); S(2, 10, 10).$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}; \quad \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 3; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(\vec{a} - 5\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-3; -17), B(19; 27), C(-14; 5).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$x^2 = 40y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$y^2 + 5x - 6y + 4 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$-\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{9} = 1,$$

$$25x^2 - 100y^2 + 4z^2 + 50x - 24z + 61 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $y = e^{-z} + 1$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2 = x^2 + y^2; x^2 + y^2 = 4y; z \geq 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 2 & -10 & -4 & -4 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 7x + 2, A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AXB = C$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & -1 & 9 \\ -3 & -1 & 3 & -7 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..n}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3..n} = x_{3..o} + x_{ч..n},$$

де  $x_{3..o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч..n}$  - частковий розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 9 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 22 & 23 \\ 3 & -2 & 2 & 13 & 13 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 0; 4), \vec{q} = (-1; 1; 3), \vec{r} = (1; -2; 0),$$

$$\vec{a} = (6; -1; 7).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$1 + x + x^2, 1 + 2x + x^2, 1 + 3x + x^2, x \in (-\infty; +\infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-5x_1^2 - x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

### Варіант 19

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 3 \sin 4\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x + y = 1$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникової форми:

$$z = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{2-2i}{1-2i}$$

4. Обчислити:  $(-i+1)^{15}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{1-i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності

$$|z-i| \leq 1, \quad 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(-2, -4, -3)$ ;  $B(1, -4, 1)$ ;  $C(-1, -6, -5)$ ;  $S(3, 0, 7)$ .

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OY}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}; \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 3; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(5\vec{a} - \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-14; -15), B(0; 13), C(-21; -1)$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{44} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$y^2 = -12x$$



14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 16y = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{64} = 1,$$

$$-4y^2 + 25z^2 - 200x - 8y - 150z + 221 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $(x^2 + y^2)^2 = 32xy$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 16; z = 25 - x^2 - y^2; z \geq 3; x \geq 0; y \geq 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + 7x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = -12, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..n}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3..n} = x_{3..o} + x_{ч..n},$$

де  $x_{3..o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч..n}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 0; 5), \quad \vec{q} = (-1; 3; 2), \quad \vec{r} = (0; -1; 1),$$

$$\vec{a} = (5; 15; 0).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{0; 1; 1\}, \quad \vec{b} = \{1; 0; 1\}, \quad \vec{c} = \{1; 1; 0\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$x_2^2 - 7x_3^2 - x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

## Варіант 20

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = -3 \sin 4\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $xy = c/a$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = (1 + i\sqrt{3}) : (1 - i\sqrt{3}).$$

4. Обчислити:  $(-\sqrt{3} - i)^{10}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[8]{1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множину точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Re} \frac{z-i}{z-1} = 0.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(-1, 0, -5); B(-1, -4, -8); C(3, 4, -7); S(-1, 5, 5)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = -3\vec{p} + \vec{q}; \quad \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 1; \quad |\vec{q}| = 3; \quad (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(\vec{a} + 3\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-6; -1), B(2; 15), C(-10; 7).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{40} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$x^2 = -38y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$4x^2 - y^2 + 16x + 4y = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$2z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8},$$

$$x^2 - 16y^2 + 9z^2 - 4x - 64y + 18z - 195 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $x^{2/3} + y^{2/3} = 8^{2/3}$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

4	5	9	3
3	2	7	-2
-4	1	-5	0
-15	-11	-10	0

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + 2x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3.n.}$  неоднорідної системи за формулою

$$x_{3.n.} = x_{3.o.} + x_{ч.н.}$$

де  $x_{3.o.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 8 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 1; 0), \quad \vec{q} = (0; 1; -2), \quad \vec{r} = (1; 0; 3),$$

$$\vec{a} = (2; -1; 11).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$1, e^x, shx, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$x_3^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

## Варіант 21

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 2(1 - \sin \varphi)$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 + y^2 = 2x + 4y$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{2}{1+i} + \frac{i}{2-i}.$$

4. Обчислити:  $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{-1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множину точок, що задовольняють нерівності:

$$0 < \arg \frac{i-z}{i+z} < \frac{\pi}{2}.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(-1, 0, -5)$ ;  $B(-1, -4, -8)$ ;  $C(1, 2, -6)$ ;  $S(2, 0, -4)$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overline{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overline{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overline{OZ}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}; \quad \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 1; \quad |\vec{q}| = 2; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(\vec{a} - 3\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-3; -13), B(9; 11), C(-9; -1).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.  $y^2 = 6x$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$2x^2 - y^2 + 8x + 4y - 10 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z = \frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{25},$$

$$400x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 96y - 100z - 156 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $y^2 = zx$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2; x = 1; y = 1; x = 0; y = 0; z = 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + 8x + 9, A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частковий розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 1 & -7 & -1 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 0; 2), \vec{q} = (-1; 0; 1), \vec{r} = (2; 5; -3),$$

$$\vec{a} = (11; 5; -3).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{5; -6; 1\}, \vec{b} = \{3; -5; -2\}, \vec{c} = \{2; -1; 3\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

## Варіант 22

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 5\sqrt{\cos 2\varphi}$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $(x^2 + y^2)^{3/2} = 2xy$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{5}{\sqrt{2} - i\sqrt{3}} + \frac{i}{2}.$$

4. Обчислити:  $(2 - i\sqrt{2})^{10}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[5]{1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності:

$$\arg \frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{2}.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(4, 3, 2); B(1, 7, 2); C(8, 5, 6); S(5, 4, 2)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overline{AM}$ ;

2)  $\cos \angle BAC$ ;

3) вектор  $\overline{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\angle BAC$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overline{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}; \quad \vec{b} = 5\vec{p} - 2\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; |\vec{q}| = 1; \left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(\vec{b} - 5\vec{a})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(8; -12), B(16; 4), C(4; -4).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$x^2 = 12y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$7x - 5y^2 + 10y - 19 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z^2 = \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{196},$$

$$x^2 - 4y^2 + 9z^2 + 6x + 16y + 36z + 65 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів,

або як циліндричну):  $\frac{x^2}{25} + z^2 = 10z$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = 18 - x^2; z = x^2 - 32; y = -1; y = 2.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 4x - 1, A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (2; 0; 1), \vec{q} = (1; 1; 0), \vec{r} = (4; 1; 2),$$

$$\vec{a} = (8; 0; 5).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\frac{1}{x}, x, 1, x \in (0; 1).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-x_1^2 - 8x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

### Варіант 23

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 4 \cos 3\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 + y^2 = 4x$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i}$$

4. Обчислити:  $(1 + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})^8$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[5]{-i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Im} z > 2.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(0, -5, -6)$ ;  $B(3, -1, -6)$ ;  $C(4, -7, -2)$ ;  $S(1, -2, -6)$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OY}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = -\vec{p} - \vec{q}; \quad \vec{b} = -2\vec{p} + \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 5; \quad |\vec{q}| = 2; \quad \left( \widehat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(2\vec{a} - \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(4; -10), B(-16; -50), C(14; -30).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.  $y^2 = -18x$ .



14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$6x^2 + 6y^2 - 36x + 12y - 9 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{81} - \frac{z^2}{16} = 1,$$

$$4x^2 + 49y^2 - 24x - 196y - 392z - 160 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $z = x^2 - 6x$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 4; y \geq z; y \leq 2z.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 10x + 10, A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AXB = C$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (0; 1; 3), \vec{q} = (1; 2; -1), \vec{r} = (2; 0; -1),$$

$$\vec{a} = (3; 1; 8).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{7; 1; -3\}, \vec{b} = \{2; 2; -4\}, \vec{c} = \{3; -3; 5\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-3x_2^2 + 4x_3^2 - x_1x_2 + 10x_1x_3.$$

## Варіант 24

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 + y^2 = \sqrt{3}y$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникової форми:

$$z = \frac{1+i^{15}}{(1-i)^3}.$$

4. Обчислити:  $(2 - 2\sqrt{2}i)^{10}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[5]{i-1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$\operatorname{Re}(z(1-i)) < \sqrt{2}.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(0, 3, 4); B(1, 5, 6); C(6, 3, -4); S(1, 3, 5)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OY}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + 7\vec{q}; \vec{b} = -2\vec{p} + 3\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; |\vec{q}| = 5; \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(2\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(17; -4), B(-9; -56), C(30; -30).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$x^2 = -42y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$x^2 + 3y^2 + 4x - 9y - 4 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{81} - \frac{z^2}{64} = -1,$$

$$144x^2 - 16y^2 - 9z^2 - 288x + 32y - 36z + 92 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $y = xz$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = xy; x + y = 1; z = 1.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 11 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 2x - 7, A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..n}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3..n} = x_{3..o} + x_{3..n},$$

де  $x_{3..o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{3..n}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (3; 0; 2), \vec{q} = (1; 2; -1), \vec{r} = (-1; 1; 1),$$

$$\vec{a} = (8; 1; 12).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$1, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, x \in \left( 0; \frac{\pi}{2} \right).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

### Варіант 25

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 4\sqrt{\sin 2\varphi}$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2 - y^2 = 16$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{1}{1+i} + \frac{i}{2-i}.$$

4. Обчислити:  $\left[ \sin \frac{\pi}{4} + i(1 - \cos \frac{\pi}{4}) \right]^4$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[5]{1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(8, 9, 4); B(8, 5, 1); C(10, 11, 3); S(8, 10, 6)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}; \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 3; |\vec{q}| = 4; \left( \vec{p}, \vec{q} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(\vec{a} - 2\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-4; -1), B(-8; -9), C(-2; -5).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{11} - \frac{y^2}{25} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.  $y^2 = 12x$ .

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$9x^2 - 18x + 3y + 11 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1,$$

$$9z^2 - 16x^2 - 18z - 288y + 297 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $y^2 + z^2 = 12y$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 16; z = 25 - x^2 - y^2; z = 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 8x + 9, A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AXB = C$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -14, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -10. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & -2 & 3 \\ 8 & 5 & 5 & -4 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & -3 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & -3 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 4; 1), \vec{q} = (-3; 2; 0), \vec{r} = (1; -1; 2), \\ \vec{a} = (-9; -8; -3).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{1; 2; 3\}, \vec{b} = \{6; 5; 9\}, \vec{c} = \{7; 8; 9\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-5x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

## Варіант 26

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 2 \sin 3\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2/4 + y^2/9 = 1$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{5}{-i} + i(1-i).$$

4. Обчислити:  $(-1-i)^{10}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[6]{-i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Im} z - 1 = |z|.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(8, 9, 4); B(8, 5, 1); C(12, 13, 2); S(8, 10, 5)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OZ}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = -\vec{p} - 4\vec{q}; \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 5; |\vec{q}| = 2; \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(2\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(6; -18), B(-2; -34), C(10; -26).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

$$\text{малюнок. } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{31} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$x^2 = 48y.$$

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$2x^2 - 5y^2 - 20y + 5 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z = \frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{169},$$

$$16x^2 - 9y^2 - 144z^2 + 64x + 36y + 127 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $(y^2 + z^2)^2 = 8(y^2 - z^2)$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = y^2 - x^2; y^2 + x^2 = 1; z = 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + 6x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 1 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -3 & 12 & 0 \\ -5 & 2 & 12 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -13 & 11 & -3 & 49 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 4 & 9 & -13 & 14 & -37 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (0; 2; 1), \quad \vec{q} = (0; 1; -1), \quad \vec{r} = (5; -3; 2),$$

$$\vec{a} = (15; -20; -1).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$x, (1+x), (1+x)^2, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

### Варіант 27

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = -4(\cos \varphi - 1)$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $x^2/4 - y^2/9 = 1$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{i}{2+i} + \frac{2+i}{i}$$

4. Обчислити:  $(2 - i\sqrt{2})^{10}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{-4}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$\operatorname{Im}(z^2) \leq 2, \quad |z| \geq 1.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(10, 9, 8); B(12, 11, 9); C(12, 10, 10); S(10, 12, 7)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}; \quad \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 2; \quad |\vec{q}| = 5; \quad (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(3\vec{a} - \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-16; 0), B(-2; 28), C(-23; 14).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть малюнок.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

$$\text{Зробіть малюнок. } \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{41} = 1.$$

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$$y^2 = -34x.$$



14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$x^2 + 10xy + y^2 + 18x - 6y - 16 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$9x^2 + 5y^2 - 18x + 30y + 9 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$2z = \frac{x^2}{72} - \frac{y^2}{32},$$

$$25x^2 + 4y^2 + z^2 + 50x - 16y + 2z - 58 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів,

або як циліндричну):  $z = 6e^{-(x^2+y^2)}$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; x \geq 0; y \geq 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XA = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -13 & -17 & -2 \\ 11 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3.н.} = x_{3.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{3.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 8 & -3 \\ 6 & 9 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 0; 1), \quad \vec{q} = (1; -2; 0), \quad \vec{r} = (0; 3; 1),$$

$$\vec{a} = (2; 7; 5).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{2; 1; 0\}, \quad \vec{b} = \{-5; 0; 3\}, \quad \vec{c} = \{3; 4; 3\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$2x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

## Варіант 28

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 4 \cos 4\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $y^2 = 2ax - x^2$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{1}{i}(1 - 3i)(3i - 2).$$

4. Обчислити:  $(1 - \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})^4$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють нерівності:

$$|z|^2 + \operatorname{Im}(z^2) < 1.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(0, -2, -1)$ ;  $B(6, -2, 7)$ ;  $C(1, -4, -3)$ ;  $S(1, -2, 5)$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overline{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overline{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overline{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}; \quad \vec{b} = \vec{p} + \vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 7; \quad |\vec{q}| = 2; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{b}}(\vec{a} - 4\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(2; -7), B(-16; -43), C(11; -25).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{64} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.

$x^2 = -26y$ .

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$2x^2 + 12xy + 2y^2 + 60x + 20y + 51 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$9x^2 + 5y^2 - 18x + 30y + 9 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$z^2 = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49},$$

$$225x^2 - 36y^2 - 100z^2 - 216y + 800z - 2824 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $x = \ln(y - 3)$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 = 2x; z \geq 0.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 - 9x + 5, A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AX = B$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & -7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -6, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..n}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3..n} = x_{3..o} + x_{3..n},$$

де  $x_{3..o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{3..n}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (0; 1; 5), \vec{q} = (3; -1; 2), \vec{r} = (-1; 0; 1),$$

$$\vec{a} = (8; -7; -13).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$e^x, xe^x, x^2e^x, x \in (-\infty; +\infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

### Варіант 29

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = 5 \sin 4\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $4x^2 - 3y^2 = 1$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \frac{4-i}{4+i} + \frac{4+i}{4-i}$$

4. Обчислити:  $(1-2i)^5$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{-81}$ .

6. На комплексній площині зобразити множини точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z} = c.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$A(5, 0, -1)$ ;  $B(8, 4, -1)$ ;  $C(13, -4, 7)$ ;  $S(6, 2, -1)$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OX}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}; \quad \vec{b} = -2\vec{p} + 3\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 5; \quad |\vec{q}| = 1; \quad \left(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $pr_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(-11; -8), B(15; 44), C(-24; 18).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{15} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.  $y^2 = 44x$ .

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$4y^2 + 8x - 16y - 20 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{121} - \frac{z^2}{25} = 1,$$

$$16x^2 + 25y^2 + 32x + 100y - 800z + 3316 = 0.$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$ .

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; z \leq 6 - x^2 - y^2.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + 8x + 7, A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $AXB = C$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а) за формулою Крамера;  
б) матричним методом;  
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 13 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{3..n}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{3..n} = x_{3..o} + x_{3..n},$$

де  $x_{3..o}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{3..n}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & -5 & 2 \\ 2 & -7 & -3 & -4 & 11 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (4; 0; 1), \vec{q} = (3; 1; -1), \vec{r} = (0; -2; 1), \\ \vec{a} = (0; -8; 9).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$\vec{a} = \{2; 0; 2\}, \vec{b} = \{1; -1; 0\}, \vec{c} = \{0; -1; -2\}.$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-4x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

### Варіант 30

1. Побудувати криву в полярній системі координат:  $\rho = -5 \cos 4\varphi$ .

2. Перейти до полярних координат і побудувати криву:  $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$ .

3. Для комплексного числа записати алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми:

$$z = \left( \frac{1+i}{1-i} \right)^3.$$

4. Обчислити:  $(2 + 2\sqrt{3}i)^{12}$ .

5. Знайти всі значення кореня:  $\sqrt[4]{i-1}$ .

6. На комплексній площині зобразити множиную точок, що задовольняють рівності:

$$\operatorname{Im} \frac{z+i}{z+1} = 0.$$

7. Трикутна піраміда  $SABC$  задана своїми вершинами:

$$A(-1, 2, 3); B(-2, 4, 1); C(2, 2, -1); S(7, 2, -3)$$

Знайти:

1) довжину медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  та напрямні косинуси вектора  $\overrightarrow{AM}$ ;

2)  $\cos \widehat{BAC}$ ;

3) вектор  $\overrightarrow{AL}$ , направлений вздовж бісектриси кута  $\widehat{BAC}$ ;

4) площу трикутника  $ABC$ , застосовуючи векторний добуток векторів;

5) одиничний вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярний до площини трикутника  $ABC$ , що утворює тупий кут з віссю  $\overrightarrow{OZ}$ ;

6) висоту  $SO$  піраміди  $SABC$ , застосовуючи проекцію вектора на вісь;

7) об'єм піраміди  $SABC$  двома способами: за допомогою мішаного добутку векторів та з використанням площі та висоти піраміди.

8. Дано вектори:

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}; \quad \vec{b} = -2\vec{p} + 3\vec{q};$$

$$|\vec{p}| = 4; \quad |\vec{q}| = 3; \quad \left( \widehat{\vec{p}, \vec{q}} \right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Знайти:

1) довжини діагоналей  $d_1$  і  $d_2$  паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ;

2) проекцію  $np_{\vec{a}}(\vec{a} + 3\vec{b})$ ;

3) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

9. Задано вершини трикутника:

$$A(1; -12), B(-1; -16), C(2; -14).$$

Знайти:

а) загальні рівняння всіх сторін трикутника;

б) рівняння медіани  $CM$ , записати як рівняння у відрізках;

в) нормоване рівняння висоти  $BN$ ; знайти довжину  $BN$ ;

г) рівняння бісектриси  $AL$ , записати як рівняння з кутовим коефіцієнтом;

д) кут між  $AL$  та  $BN$ .

10. В піраміді  $SABC$  (див. завдання 7) знайти:

а) загальне рівняння грані  $ABC$ ;

б) канонічне та параметричне рівняння висоти, проведеної до грані  $ABC$ ;

в) кут між гранями  $ABC$  та  $ABS$ ;

г) точку, симетричну вершині  $S$  відносно грані  $ABC$ .

11. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис; запишіть його полярне рівняння; зробіть

малюнок.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

12. Для гіперболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис та асимптот. Запишіть її полярне рівняння.

Зробіть малюнок.  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$ .

13. Для параболи, що задана канонічним рівнянням знайдіть параметр  $p$ , координати фокуса, рівняння директриси і запишіть її полярне рівняння. Зробіть малюнок.  $x^2 = 28y$ .

14. а) Записати канонічне рівняння кривої, повертаючи її навколо початку координат. Визначити тип кривої та всі її параметри: півосі, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, асимптоти.

$$4xy + 4y + 1 = 0.$$

б) Спростити рівняння кривої та побудувати її. Визначити всі її параметри.

$$8x^2 + 8y^2 - 4x - 4y + 3 = 0.$$

15. Визначте тип та побудуйте поверхні:

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{121} = 1,$$

$$4x^2 - 100y^2 + 25z^2 + 24x - 200y - 100z + 36 = 0$$

16. Побудуйте поверхню (методом перерізів, або як циліндричну):  $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$

17. Побудуйте тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2 - 6; z = 4 - x^2 - y^2; x^2 + y^2 = 1.$$

18. Обчисліть визначник:

а) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця;

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

б) зведенням до трикутного вигляду.

19. Обчисліть  $f(A)$ , якщо:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5, A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

20. Розв'яжіть матричне рівняння:  $XAB = C$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) за формулою Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$$

22. Знайдіть ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & -3 & 12 & 0 \\ 2 & -5 & 12 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

23. Дослідіть на сумісність систему лінійних алгебраїчних рівнянь із заданою розширеною матрицею. Знайдіть, у разі сумісності, загальний розв'язок  $x_{з.н.}$  неоднорідної системи за формулою:

$$x_{з.н.} = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де  $x_{з.о.}$  - загальний розв'язок відповідної однорідної системи,  $x_{ч.н.}$  - частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 9 \end{array} \right).$$

24. Дано вектори  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{a}$ . Довести, що  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  - базис. Знайти координати  $\vec{a}$  в базисі векторів  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ .

$$\vec{p} = (1; 0; 5), \vec{q} = (3; 2; 7), \vec{r} = (5; 0; 9),$$

$$\vec{a} = (-4; 2; -12).$$

25. Перевірити, чи є даний набір елементів лінійно залежним; вказати для лінійно залежних елементів коефіцієнти лінійної комбінації.

$$e^x, shx, chx, x \in (-\infty; +\infty).$$

26. Знайти власні числа та власні вектори матриці. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

27. Квадратичну форму з завдання 14 а) привести до канонічного вигляду.

28. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність:

$$-x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$